8

KÉZIKÖNYV

ÉS

OKTATÁSI SEGÉDESZKÖZ

A

„SZÁMTANBÓL“

SZABÁLYOK ÉS PÉLDÁKKAL

A MAGY. KIR.

CSENDŐRLEGÉNYSÉG SZÁMÁRA.

KÉRDÉSEKKEL ÖSSZEÁLLITOTTA

BALLÓ LAJOS

M. KIR. CSENDŐRHADNAGY.

SZEGED, 1900.

SCHULHOF KÁROLY KÖNYVNYOMDÁJA.

KÉZIKÖNYV

ÉS

OKTATÁSI SEGÉDESZKÖZ

A

„SZÁMTANBÓL“

SZABÁLYOK ÉS PÉLDÁKKAL

A MAGY. KIR.

CSENDŐRLEGÉNYSÉG SZÁMÁRA.

KÉRDÉSEKKEL ÖSSZEÁLLITOTTA

BALLÓ LAJOS

M. KIR. CSENDŐRHADNAGY.

SZEGED, 1900.

SCHULHOF KÁROLY KÖNYVNYOMDÁJA.

SZÁMTANI SZABÁLYOK

példákkal magyarázva.

I.

Alapműveletek.

Összeadás.

1. *Mit tesz összeadni?*

Összeadni annyit tesz, mint megtudni azt, hogy több adott szám mennyit tesz együttvéve.

2. *Az összeadás eredményét minek nevezzük?*

Az összeadás eredményét: „összegnek“ nevezzük.

3. *Mire kell szigoruan vigyázni az összeadásnál?*

Az összeadásnál szigoruan vigyázni kell arra, hogy a számok pontosan egymás alá irassanak; azaz az egyes egyes alá, a tizes tizes alá, a százas százas alá s igy tovább.

4. *Mi az összeadás jele?*

Az összeadás jele egy álló kis kereszt. (+)

Pl. 132 + 208 mennyit tesz együttvéve?

$$\begin{array}{r} 132 \\ \underline{208} \\ 340 \end{array}$$

tehát az adott két szám összege 340.

Egy kereskedő elad 3 drb. lovat, az elsőt 435, a másodikat 398 és a harmadikat 379 koronáért, mennyit kapott a három lóért?

435
398
379
———
1212

tehát a három darab lóért kapott összesen 1212 koronát.

5. *Miként hajtatik végre az összeadás?*

A következőképpen: első sorban az adott számok egyeseit összeadjuk s ha ezen számok összege nem több, mint kilencz (9), akkor azt (a vonal alá) az egyes alá irjuk. Ha azonban az összeadott számok összértéke (9) kilencznél több, pl. 10, 24, 36, 59 stb. akkor a nyert számok egyes helyén álló számát az ismert módon az egyes alá irjuk, mig a tizes helyén álló számot mint maradékot az adott számok tizeseihez hozzáadjuk.

Igy járunk el a tizesek, századok, ezresek stb. összeadásánál is.

Pl.

8659
4786
———
13445

A mint látjuk, az egyes helyén álló 9 és 6-ot összeadtuk s e két szám összértéke 15, melyből az 5-öt mint az egyes helyén álló számot leirtuk, mig az 1-est mint tizes helyen álló számot a tizesekhez (itt az 5 és 8) adtuk s lett belőlük 14, melyből szintén csak a 4-est irtuk le, mig az 1-est átvittük a százasokhoz, a százasok helyén 6 és 7 áll, melyekhez a tizesektől maradott egyet (1) ha hozzáadjuk lesz 14, ezen számból a 4-es leirva az (1) mint maradékot átvittük a 8 és 4 mint ezresekhez s igy lett a 8 és 4-ből 13, melyet egészen leirtunk.

6. *Mi az összeadás ellenpróbája?*

Az összeadás ellenpróbája a kivonás.

Pl.

3794
5364
———
9158

Hogy összeadásunk helyességéről meggyőződhessünk, a két adott szám összegéből (9158) az egyik adott számot kivonjuk s maradékul a másik adott számot kell hogy találjuk.

Nézzük meg a felvett példánál: az összeg 9158 s ha most ebből az adott számok egyikét, mondjuk 3794-et kivonjuk:

9158
3794
———
lesz 5364 s ez a maradék, melyet ha megvizsgálunk, ugy találjuk, hogy ez a másik adott szám, tehát összeadásunk helyes.

Ha azonban több összeadandó adott szám van s annak helyességéről akarunk meggyőződni, akkor az adott számok közül egyet kiemelve, a többit összeadjuk s az igy nyert összeget az összes adott szám összegéből levonjuk, mely eljárás után maradékúl a kiemelt adott számot kell találjuk.

Pl.

6452
398
4531
———
11381

Itt a mint látjuk, három adott számunk van, melyeket összeadva 11381-et találunk.

Ha most az összeg helyességéről meggyőződni akarunk, akkor az adott számok közűl egyet — mondjuk jelen esetben a 6452-őt emeljük ki, a másik kettőt — a 398 és 4531-et adjuk össze, lesz:

398
4531
———
4929

a most talált összeget (4929) vonjuk le a fentebbi három adott szám összegéből (11381) lesz tehát:

11381
4929
———
6452

a mint látjuk a kivonás végrehajtása után az előbbi kiemelt számot vagyis a felvett három szám egyikét találtuk, tehát a fenti összeadásunk helyes.

Az összeadásnak egy másik ellenpróbája is van.

Ezt nagyon helyesen és eredményesen alkalmazzuk akkor, ha több adott szám összeadásának helyességéről akarunk meggyőződni.

Pl.

$$\begin{array}{r} 368942 \\ 83246 \\ 346821 \\ 17539 \\ \hline 816548 \end{array}$$

Ha a fenti adott számok összegének helyességéről akarunk meggyőződni, akkor a felvett számokat tekintet nélkül arra, hogy a tizes, százas, ezres stb. helyen állanak, mint egyes értékű számokat tekintjük s adjuk össze.

Igy:

368942	ezt igy irjuk	$3 + 6 + 8 + 9 + 4 + 2 = 32$
83246	» » »	$8 + 3 + 2 + 4 + 6 = 23$
346821	» » »	$3 + 4 + 6 + 8 + 2 + 1 = 24$
17539	» » »	$1 + 7 + 5 + 3 + 9 = 25$
816548		104

Most az adott számok összegét is (jelen esetben a 816548 összegét) tekintet nélkül a számok helyi értékére, mint egyes helyen állókat összeadjuk, lesz: $8 + 1 + 6 + 5 + 4 + 8 = 32$.

Ezután mindkettőnél a számokat szintén helyi értéküket nem tekintve a fenti mód szerint adjuk össze mindaddig, a mig csak is egy számot nyerünk, mely ha mind a kettőnél egyenlő, akkor az összeadás helyes.

A fenti egyik szám a 104 a fenti módozat szerint irva $1 + 0 + 4 = 5$.

A másik szám 32, melyet szintén mint fentebb leirva lesz $3 + 2 = 5$.

Végeredményül mindkettőnél 5-öt találtunk, tehát összeadásunk helyes.

Kivonás.

7. Mit tesz kivonni?

Kivonni annyit tesz, mint megtudni azt, hogy két adott szám közül az egyik mennyivel kisebb (vagy nagyobb) a másiknál.

8. Minek nevezzük a kivonás eredményét?

A kivonásnál az eredményt «maradék»-nak vagy «különbség»-nek nevezzük.

9. Mi a kivonás jele?

A kivonás jele egy vizszintes kis vonás (—).

10. Minő számtani kifejezéseket különböztetünk meg a kivonásnál?

A kivonásnál megkülönböztetünk háromfélét:
1. a «kisebbitendőt» a melyből kivonunk;
2. a «kivonandót», a melyet a kisebbitendőből kivonunk; és
3. a «maradékot» a melyet a kivonási művelet végrehajtása után nyerünk.

11. Mire kell vigyáznunk a kivonásnál?

A kivonásnál épen úgy, mint az összeadásnál, arra kell vigyázni, hogy a számjegyek pontosan egymás alá irassanak.

12. Miként győződünk meg arról, hogy a kivonás helyes, vagyis mi a kivonás ellenpróbája?

Ha a maradékot (különbséget) a kivonandóval összeadjuk s az egyenlő lesz a kisebbitendővel, akkor a kivonás helyes.

A kivonás ellenpróbája tehát az összeadás.

Pl. 18 mennyivel kisebb 32-nél?

$$\begin{array}{r} 32 \\ 18 \\ \hline 14 \end{array} \quad \text{ezt igy is irhatjuk: } 32 - 18 = 14$$

Tehát 18 tizennégygyel (14) kisebb 32-nél.

Most győződjünk meg a szabály szerint, hogy a számadásunk helyes-e.

A szabály azt mondja, hogy a maradékot (itt a 14) adjuk hozzá a kivonandóhoz (itt a 18) s az a kisebbitendőt adja.

Tehát

$$14 + 18 \text{ vagy másképen irva } \begin{array}{r} 14 \\ 18 \\ \hline 32 \end{array}$$

Ebből látható, hogy a kivonás helyes.

Egy kereskedő 5 drb sertést ad el 448 koronáért; mennyi pénze marad, ha abból a pénzből 3 drb sertést 185 koronáért vesz?

448 — 185, azaz más alakba irva:

$$\begin{array}{r} 448 \\ 185 \\ \hline 263 \end{array}$$

Tehát még marad 263 koronája.

Szorzás.

13. Mit tesz szorozni?

Szorozni annyit tesz, mint egy adott számot annyiszor venni (tenni) önönmagával összeadandóúl, mint azt egy másik adott szám mutatja.

14. A szorzás eredményét hogy nevezzük?

A szorzás eredményét „szorzat“-nak nevezzük.

15. Minő számtani kifejezéseket különböztetünk meg a szorzásnál?

A szorzásnál megkülönböztetünk háromfélét, u. m.:

1. a szorzandót, a melyet meg kell szorozni;
2. a szorzót, melylyel szorozunk; és
3. a szorzatot, melyet a két adott szám összeszorzása után nyerünk.

16. Mi a szorzás jele?

A szorzás jele egy dült kereszt (×).

Pl. 45 × 3, vagyis a szabály értelmében a 45-öt háromszor kell tenni önönmagával összeadandóul, igy:

$$\begin{array}{r} 45 \\ 45 \\ 45 \\ \hline 135 \end{array}$$

tehát az eredmény, vagyis a szorzat 135.

Ha a 45-öt 3-mal megszorozzuk, szintén a 135-öt kell kapjuk.

$$\begin{array}{r} 45 \times 3 \\ \hline 135 \end{array}$$

tehát a szorzat 135.

17. Hogy történik a szorzás akkor, ha ugy a szorzandóban, mint a szorzóban több szám van?

Ez esetben a szorzást a szorzó egyesével elvégezzük ugy, mintha a mellett több szám nem is volna; azután a szorzó tizes helyén álló számával végezzük el a szorzást, de a szorzat leirásánál arra vigyázunk, hogy egy számmal bennebb, azaz az előbbi szorzat tizese alá irassék az első szám; azután a szorzó százas helyén álló számával végezzük a szorzást, eppen ugy, mint az előbb, csak most a szorzat első száma még egygyel bennebb, azaz a százas alá iratik s igy tovább.

Ha azonban a szorzat kétjegyű, akkor az egyes helyen álló számjegyet leirjuk s a tizes helyen állót mint maradékot, a tizes helyen álló számjegy szorzatához adjuk. Igy járunk el a tizesek, százasok, ezresek stb. helyén álló számjegyek szorzásánál is.

Pl.

$$\begin{array}{r} 314 \times 34 \\ \hline 1256 \\ 942 \\ \hline 10676 \end{array}$$

Itt először a 4-es számmal végeztük a szorzást s a szorzatot a vonal alá irtuk, azután a 3-as számmal szoroztuk a 314-et s a szorzatot, a mint lehet látni, egy számmal bennebb irtuk.

Ha megtekintjük a fenti művelet végrehajtását, ugy találjuk, hogy a midőn a szorzó 4-esével a szorzandó 4-esét megszoroztuk, szorzatúl 16-ot találtunk, melyből csak a 6-ost irtuk le a vonal alá szorzatúl; ez azért történt, mert az 1-est mint tizes helyen álló számjegyet maradékúl tartottuk vissza s midőn a szorzó 4-esével a szorzandó tizes helyén álló számjegyet (itt az 1-est) megszoroztuk, ahhoz hozzáadtuk s igy lett a 4 és 1 szorzatából 5.

Ha a szorzást elvégeztük, akkor az egyes rész szorzatokat ugy a miként egymás alá irattak, az ismert mód szerint összeadjuk s ezt a két adott szám szorzatának nevezzük.

18. *Mi a szorzás ellenpróbája?*

A szorzás ellenpróbája az osztás.

A szorzásunk helyességéről meggyőződhetünk ugy, hogy a szorzatot az adott szorzóval elosztjuk s ha hányadosúl az adott szorzandót találjuk, akkor a szorzásunk helyes.

Pl. Nézzük meg a fenti példát.

Mi a 314-et megszoroztuk 34-gyel s szorzatúl 10676-ot találtunk.

Ha meg akarunk győződni szorzásunk helyességéről, akkor a 10676-ot oszszuk el 34-gyel.

Lesz tehát:

$$
\begin{array}{l}
10676 : 34 = 314 \\
\underline{102} \\
\;\;\text{„„}47 \\
\;\;\;\underline{34} \\
\;\;\;136 \\
\;\;\;\underline{136} \\
\;\;\;\text{„„„}
\end{array}
$$

A mint látjuk, az osztás végrehajtása után hányadosul 314-et, vagyis az adott szorzandót találtuk; tehát szorzásunk helyes volt.

A szorzásnak is van egy más ellenpróbája, melylyel röviden és helyesen kiszámithatjuk, hogy a szorzatunk helyes-e. Ezt szintén akkor alkalmazhatjuk igen eredményesen, ha ugy a szorzó, mint a szorzandóban több számjegy van.

Pl.

$$
\begin{array}{r}
\underline{78964 \times 345} \\
394820\;\; \\
315856\;\;\;\; \\
\underline{236892\;\;\;\;\;\;} \\
27242580
\end{array}
$$

Ha most röviden a szorzat helyességéről meg akarunk győződni, akkor a szorzandóban levő számokat helyi értékükre való tekintet nélkül mint egyeseket összeadjuk; ha ezen összeadásból több számjegy jönne ki egynél, azt ismét a fenti mód szerint összeadjuk s az igy nyert számot megszorozzuk a szorzónak a fenti eljárás szerint nyert összegével. Ezen szorzatnak adni kell az eredeti szorzat (27242580) fenti mód szerint kikeresett összegét.

Lássuk tehát a felvett példát:

ez a szorzandó 78964 igy irva $7+8+9+6+4=34$, $3+4=7$
ez a szorzó 345 igy irva $3+4+5=12$, $1+2=3$

Most a nyert 7 és 3-at összeszorozzuk, lesz belőle $7 \times 3 = 21$, ezt a fenti mód szerint összeadva $2+1=3$, adjuk össze szintén a fenti mód szerint a fő szorzatot (27242580) is, lesz: $2+7+2+4+2+5+8+0=30$, a 30-at ismét összeadva lesz $3+0=3$.

Ha megtekintjük a szorzó és szorzandónak eredményét, valamint a szorzatnak fenti mód szerint kihozott összegét, mindkettőnél 3-at találtunk, tehát a fő szorzásunk helyes.

19. *Miként szorzunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel?*

10, 100, 1000-el, vagyis oly számmal, melynek első száma 1 s a többi 0, ugy szorozunk, hogy a szorzandóhoz annyi 0-át csatolunk, a hány a szorzóban van.

Pl. $364 \times 10 = 3640$

azaz a 364-et ha 10-zel meg akarjuk szorozni, akkor a 364 mellé egy 0-át irunk, igy: 3640.

Ha százzal kell megszorozni, pl.: 364×100, akkor két 0-át irunk melléje, azért, mert a százban (100) két 0 van; lesz tehát az eredmény, illetve a szorzat 36400.

20. *Miként végezzük a szorzást akkor, ha a szorzó olyan szám, hogy abban az egyes, tizes, százas, ezres stb. helyén 0 áll?*

Az esetben a szorzó egész számával elvégezzük a szorzást s a szorzat végére annyi 0-át irunk, a hány 0 van a szorzóban.

Pl. 235×60, itt a szorzóban egy 0 van, tehát a 6-al a szorzást elvégezzük.

$$
\begin{array}{l}
\underline{235 \times 60} \\
1410
\end{array}
$$

most a szorzathoz egy 0-át irunk, lesz akkor 14100.

Osztás.

21. Mit tesz osztani?

Osztani annyit tesz, mint megtudni azt, hogy két adott szám közül az egyik hányszor nagyobb (vagy kisebb) a másiknál.

Vagy más szóval: osztani annyit tesz, mint egy adott számot annyi egyenlő részre bontani, a mennyire azt egy másik adott szám mutatja.

22. Mi az osztás jele?

Az osztás jele egy kettős pont (:).

Pl. hányszor nagyobb 12 a 4-nél?

Ez esetben a 12-őt elosztjuk 4 egyenlő részre, vagyis megnézzük, hogy a 4-et a 12-ben hányszor találjuk meg.

$$12 : 4 = 3$$

tehát 12 a 4-nél 3-szor nagyobb, vagyis a 4-et a 12-ben 3-szor találjuk meg.

23. Miről tudjuk meg, hogy az osztásunk helyes, azaz mi az osztás ellenpróbája?

Azt, hogy vajjon az osztásunk helyes-e, megtudjuk, ha az osztót a hányadossal (vagyis azon számmal, melyet az osztás véghezvitele után nyerünk) megszorozzuk. Ha ezen szorzás után olyan számot találunk, mely az osztandóval egyenlő, akkor az osztás helyes.

Pl. az előbbi osztásnál 12-őt osztottunk 4-gyel s hányadosúl 3-at nyertünk.

Ha most a 4-et megszorozzuk a 3-mal, 12-őt nyerünk, vagyis olyan számot, mint az osztandó száma.

24. Minő számtani kifejezéseket különböztetünk meg az osztásnál?

Az osztásnál megkülönböztetjük:

1. az osztandót, melyet elosztunk;
2. az osztót, melylyel osztunk; és
3. a hányadost, melyet az osztás végén nyerünk.

Pl. 40 osztandó 8-al:

$$40 : 8 = 5$$

itt az osztandó 40, osztó a 8 és a hányados pedig az 5.

Általános szabály az osztásnál, hogy:

A hányados értéke nem változik, ha ugy az osztót, mint az osztandót egy és ugyanazon számmal megszorozzuk vagy elosztjuk.

12 osztandó 4-el, mi az eredmény, illetve mi a hányados?

$$12 : 4 = 3$$

tehát a hányados 3.

Ha most ugy az osztandót (12), mint az osztót (4) egy és ugyanazon számmal — mondjuk pl. itt 2-vel — megszorozzuk, lássuk mit nyerünk:

$$12 \times 2 = 24$$
$$4 \times 2 = 8$$

Nézzük meg most, hogy ha az osztást elvégezzük, mit nyerünk hányadosúl?

$$24 : 8 = 3$$

ehát akár a 12 : 4, akár ezen két számnak a 2-veli szorzatát veszszük, mindkét esetben hányadosúl a 3-at találjuk.

Most egy és ugyanazon számmal oszszuk el.

12 volt az előbbeni osztandó. 4 pedig az előbbeni osztót Oszszuk el mind a kettőt 2-vel.

$$12 : 2 = 6$$
$$4 : 2 = 2$$

most hajtsuk végre az osztást 6 : 2 = 3.

Azt találjuk, hogy most is hányadosúl 3-at nyertünk.

25. 10-zel, 100-zal, 1000-rel stb. hogy osztunk?

10-zel, 100-zal, 1000-rel stb. ugy osztunk, hogy az osztandóból annak egyesétől számitva annyi számjegyet vágunk el, a hány 0 van az osztóban.

Az igy nyert számokból a jegy előtti a hányados, a jegy utáns a maradék lesz.

Pl.

3645,9 : 10 = 3645
9

364,59 : 100 = 364
59

36,459 : 1000 = 36
459

Egy kilométerben van ezer méter, mennyi ennek 10-ed, 100-ad, 1000-red része?

1000 : 10 = 100
1000 : 100 = 10
1000 : 1000 = 1

vagyis egy kilométernek

10-ed része 100 méter,
100-ad része 10 méter,
1000-ed része 1 méter.

Oszthatóság.

26. Mit értünk oszthatóság alatt?

Hogy egy rövid pillantással (áttekintéssel) megtudjuk azt, hogy valamely szám osztható-e maradék nélkül, erre az oszthatóság smertető jelei tanitanak meg.

Vegyük elő tehát az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 10 számot s nézzük meg, hogy ezekkel mily számok oszthatók el maradék nélkül.

27. Mely számok oszthatók 1-gyel?

Az 1-gyel:

2 : 1 = 2
3 : 1 = 3

tehát 1-gyel minden szám osztható.

28. Mely számok oszthatók 2-vel?

Pl.

24 : 2 = 12
36 : 2 = 18
70 : 2 = 35
82 : 2 = 41

2-vel azon számok oszthatók, melyekben az egyesek helyén 0, vagy oly szám áll, melyben a 2 maradék nélkül foglaltatik.

Vagyis 2-vel minden páros szám osztható.

29. Mely számok oszthatók 3-mal?

3-mal azon számok oszthatók maradék nélkül, melyekben a számjegyek alaki értékeinek összege 3-mal osztható.

Pl.

1. 27 : 3 = 9
2. 54 : 3 = 18
3. 561 : 3 = 187
4. 6531 : 3 = 2177

Nézzük meg az elsőnél 27, itt az alaki érték 2 + 7 = 9 9 pedig osztható 3-mal;

54; itt az alaki érték 5 + 4 = 9; a harmadiknál 561, itt az alaki érték 5 + 6 + 1 = 12; a negyediknél 6531; itt az alaki érték 6 + 5 + 3 + 1 = 15.

30. Mely számok oszthatók 4-gyel?

4-gyel azon számok oszthatók, melyekben az egyesek és a tizesek helyén 0 vagy oly szám áll, melyben a 4 maradék nélkül foglaltatik.

Pl. 27372 : 4, itt az egyes és tizes helyén 72 áll, 72 pedig 4-gyel maradék nélkül osztható, mert

72 : 4 = 18
4
32
32
" "

ehát a 27372 a 4-gyel maradék nélkül tényleg osztható.

31. *Mely számok oszthatók 5-tel?*

5-tel azon számok oszthatók, melyekben az egyes helyén 5 vagy 0 van.

Pl.

10 : 5 = 2
25 : 5 = 5
230 : 5 = 46
6435 : 5 = 1287

32. *Mely számok oszthatók 6-tal?*

6-tal azon számok oszthatók, melyek 2-vel és 3-mal oszthatók. Miért? Mert a 6, a 2 és 3-nak összeszorzásából jön létre; ha tehát azon szám 2-vel és 3-mal külön-külön osztható, ugy a 3 és 2 szorzatával, vagyis a 6-tal is osztható lesz.

Pl.

54 : 2 = 27
54 : 3 = 18
54 : 6 = 9

162 : 2 = 81
162 : 3 = 54
162 : 6 = 27

33. *Mely számok oszthatók 7-tel?*

7-tel csakis saját maga (a 7) s az ő többszöröse osztható maradék nélkül.

Pl.

7 : 7 = 1
14 : 7 = 2
21 : 7 = 3
140 : 7 = 20
210 : 7 = 30 stb.

34. *Mely számok oszthatók 8-czal?*

8-czal azon számok oszthatók, melyekben az egyesek, tizesek és százasok helyén 0 vagy oly szám van, melyben a 8 maradék nélkül foglaltatik.

Pl.

3457,6, : 8 = 72
56
〃16
16
〃 〃

Látjuk, hogy itt az egyes, tizes és százas helyén 576 áll, melyben a 8 maradék nélkül foglaltatik, miből folyólag a 34576 is osztható 8-czal.

Próbáljuk meg: tehát oszszuk el a

34,5,7,6 : 8 = 4322
32
〃25
24
〃17
16
16
〃16
〃 〃

Tehát a 34576 a 8-czal maradék nélkül osztható.

35. *Mely számok oszthatók 9-czel?*

9-czel azok a számok oszthatók, melyekben a számjegyek alaki értékeinek összege 9-czel osztható.

Pl. 76032 = 18
azaz: 7
6
0
3
2
18 ez az alaki értéke a felvett számnak: 18 osztható 9-czel, ennélfogva a 76032 is osztható lesz 9-czel.

Lássuk :

76032 : 9 = 8448
72
" 40
36
" 43
36
" 72
72
" "

tehát a 76032 a 9-czel osztható maradék nélkül.

36. Mely számok oszthatók 10-zel, 100-zal, 1000-rel?

10-zel oly számok oszthatók, melyekben az egyesek helyén 0 van.

100-zal oly számok oszthatók, melyekben az egyesek és tizesek helyén 0 van;

1000-rel oly számok oszthatók, melyekben az egyesek, tizesek és százasok helyén 0 van.

Pl.

450 : 10 = 45
40
" 50
50
" "

3200 : 100 = 32
300
" 200
200
" " "

87000 : 1000 = 87
8000
" 7000
7000
" " " "

II.

Tizedes törtek.

1. Mi a tört?

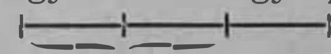
A tört nem egyéb, mint jelölt osztás.

Minden törtszám irását két szám által eszközöljük, a melyeket egy kis vizszintes vonallal (—) választunk el egymástól.

Pl. $\frac{2}{3}$ ez egy tört, melyben a felső számot (2) számlálónak, az alsót (3) nevezőnek mondjuk.

2. Mi a törtben a nevező s mi a számláló?

A törtben a nevező megjelöli, hogy egy bizonyos egységet hány részre kell osztani, mig a számláló megmutatja azt, hogy a nevező által szétosztott részekből hány részt kell venni.

Pl. Vegyünk elő egy pálczikát s azt törjük el 3 egyenlő részre, igy  s a részekből vegyünk el 2 darabot, még marad 1 darab, az elvett részeket igy fejezzük ki törttel: $\frac{2}{3}$, vagyis a pálczikának jelzett része.

Ha a törtben a nevező helyén 10, 100, 1000, 10000 stb. áll, akkor a törtet tizedes törtnek nevezzük.

A tizedes törteknél a tizedes pont a fő szerepvivő, mert attól számittatik az egész és a tizedes számok értéke.

Pl. 389·46, ez egy tizedes tört, melyet igy is irhatunk $389\frac{46}{100}$, azaz 389 egész és 46 század rész.

A tizedes pont feltevésére nagy sulyt kell fektetni, mivel a számok értéke tőle számitva balra emelkedik, jobbra csökken.

Pl. 389·46, ezen törtben a pont előtt a 9, az kilencz egyes, a 8, az nyolcz tizes és a 3, az három százast foglal magában, mig a tizedes ponttól jobbra a 4, négy tized, a 6, hat századrészt foglal magában.

Összeadás.

3. Miként történik a tizedes törtek összeadása?

A tizedes törtek összeadása éppen ugy történik, mint a közönséges egész számok összeadása.

Azonban a leirásnál arra kell vigyázni, hogy a tizedes pontok egymás alá essenek.

Pl.

$$\begin{array}{r} 347{\cdot}25 \\ \underline{275{\cdot}64} \\ 622{\cdot}89 \end{array}$$

Az összeadásnál tehát ugy járunk el, hogy a jobbról álló (legkisebb értékü) számjegyet hozzáadjuk a vele egy helyi értékkel biró számjegyhez s folytatjuk ezen összeadást addig, mig a tizedes pontot elérjük.

Ha a tizedes pontot elértük, akkor azt leirjuk s a maradékot átviszszük az egészekhez.

Pl.

$$\begin{array}{r} 3456{\cdot}983 \\ \underline{6032{\cdot}784} \\ 9489{\cdot}767 \end{array}$$

Itt láthatjuk, hogy a midőn a tizedes pont után a 9-et és 7-et összeadtuk, az előbbeni maradékkal (1) az kitett 17-et, melyből a 7-et leirtuk s mindjárt a tizedes pontot feltettük, mig a maradékot (1-et) átvittük az egészekhez s igy lett a 6 és 2-ből 9.

Kivonás.

4. Miként történik a tizedes törtek kivonása?

A tizedes törtek kivonása éppen ugy történik, mint a közönséges egész számok kivonása azzal a különbséggel, hogy a midőn a kivonással a tizedes pontig értünk, a maradékba is a tizedes pontot felteszszük.

Pl. 452·64-ből kivonandó

$$\begin{array}{r} 452{\cdot}64 \\ \underline{321{\cdot}32} \\ 131{\cdot}32 \end{array}$$

Tehát a mint látjuk a kivonást éppen ugy, mint az egész számoknáli kivonásnál elvégeztük s midőn a 3-at a 6-ból kivontuk, a maradék (3) elejébe is a tizedes pontot feltettük.

A kivonásnál is vigyázni kell arra, hogy a tizedes pontok egymás alá irassanak pontosan, nehogy ezen mulasztás miatt a számadásba hiba csuszszék be.

Szorzás.

5. Miként történik a szorzás a tizedes törtekkel?

Akár tizedes törtet szorozunk tizedes törttel, akár tizedes törtet egészszel, vagy egészet tizedes törttel, a szorzást éppen ugy, mint a közönséges egész számok szorzásánál a műveletet végrehajtjuk, de a szorzatban jobbról annyi számot vágunk el a tizedes ponttal tizedesül, a hány tizedes számjegy van a szorzó és szorzandóban együttvéve.

Pl. szorozzunk meg egy tizedes törtet tizedes törttel:

$$\begin{array}{r} 36{\cdot}43 \times 6{\cdot}32 \\ \hline 7286 \\ 10929 \\ \underline{21858} \\ 2302376 \end{array}$$

Tehát a szorzást — a mint látjuk a fenti példában — egyszerüen végrehajtottuk, azonban a szorzatban jobbról balfelé számitott négy számjegyet a tizedes ponttal elvágtunk azért, mivel a szorzóban 2 és a szorzandóban 2, összesen 4 tizedes számjegy van.

Most szorozzunk meg egy tizedes törtet egészszel:

Pl.

$$\begin{array}{r} 342{\cdot}35 \times 24 \\ \hline 136940 \\ \underline{68470} \\ 8216{\cdot}40 \end{array}$$

Itt a szorzást egyszerüen végrehajtva, a szorzatból két tizedes számjegyet elvágtunk azért, mivel a szorzandóban 2 tizedes van.

Szorozzunk most egészet tizedes törttel:

Pl.

$$\begin{array}{r} 347 \times 3{\cdot}32 \\ \hline 694 \\ 1041 \\ \underline{1041} \\ 1152{\cdot}04 \end{array}$$

A mint látjuk, itt is a szorzás egyszerüen végre lett hajtva s miután a szorzóban két tizedes számjegy van, a szorzatban is két számot tizedesül elvágtunk.

6. Miként szorozunk tizedes törtet 10-zel, 100-zal, 1000-rel?

10-zel, 100-zal, 1000-rel ugy szorozunk tizedes törtet, hogy a tizedes pontot annyi számmal teszszük jobbra, a hány 0 van a szorzóban.

Pl. $378{\cdot}496 \times 10 = 3784{\cdot}96$

azaz a tizedes pontot egy számjegygyel jobbra tettük, mivel a szorzóban (10) egy 0 van.

$$378{\cdot}496 \times 100 = 37849{\cdot}6$$

vagyis a tizedes pontot két számmal tettük jobbra, mivel a szorzóban (100) két 0 van.

$$379{\cdot}8764 \times 1000 = 379876{\cdot}4$$

itt, a mint látjuk, a tizedes pontot három számmal tettük jobbra azért, mert a szorzóban (1000) három 0 van.

Ha azonban a szorzandóban kevesebb tizedes számjegy volna, mint a hány nulla (0) van a szorzóban, akkor a még hiányzó számjegyek helyét 0-val pótoljuk.

Pl.

$$379{\cdot}87 \times 1000 = 379870$$

A mint látjuk, a szorzandóban (379·87) két tizedes jegy, mig a szorzóban (1000) három 0 van s midőn a szorzást az ismert módon elvégeztük, akkor a szorzat végére egy 0-át irtunk.

Osztás.

7. Miként történik a tizedes törtek osztása?

A tizedes törtek osztása különféleképen történik, még pedig attól függ, hogy:

1. tizedes tört osztatik-e tizedes törttel;
2. tizedes tört osztatik-e egész számmal;
3. egész szám osztatik-e tizedes törttel;
4. tizedes tört osztatik-e 10-zel, 100-zal, 1000-rel stb.

Vegyük az első esetet, vagyis nézzük meg, hogy miképen történik a tizedes tört osztása tizedes törttel.

Tegyük fel a szabályt, mely igy szól: tizedes törtet tizedes törttel ugy osztunk, hogy a tizedes pont elhagyása által a tizedes számokat egész számokká alakitjuk, még pedig ugy, hogy, ha az egyik vagy másikban több tizedes jegy volna, akkor a melyikben kevesebb tizedes jegy van, ahhoz annyi 0-át csatolunk, a hány tizedes jegygyel több van a másikban. Ennek megtörténte után az osztást, mint egész számokkal, az ismert módon végrehajtjuk.

Pl.

$$36{\cdot}4 : 6{\cdot}8$$

itt azt látjuk, hogy úgy az osztandóban, mint az osztóban 1—1 tizedes számjegy van.

Ezen esetben az osztást a tizedes pontra való tekintet nélkül végrehajtjuk.

Pl. 36·4 : 6·8, vagyis elhagyva a tizedes pontokat, lesz

$$\begin{array}{l} 364 : 68 = 5 \\ \underline{340} \\ =24 \end{array}$$

tehát a hányados 5 s még maradt 24.

Ha most az osztást folytatni akarjuk, akkor az 5 után a tizedes pontot felteszszük azért, mert a 68-at a 24-ben nem találjuk meg. Ez esetben a maradékot 0-val pótoljuk.

Pl. az előbbi osztást folytatva:

$$\begin{array}{l} 364 : 68 = 5{\cdot}352 \\ \underline{340} \\ =240 \\ \ \underline{204} \\ \ =360 \\ \ \ \underline{340} \\ \ \ =200 \\ \ \ \ \underline{136} \\ \ \ \ =64 \end{array}$$

tehát elvégezvén az osztást, a hányados 5·352 s még marad 64.

Ha tizedes törtet osztunk egészszel, az esetben ugy járunk el, hogy az osztást éppen ugy, mint a közönséges számokkal, folytatjuk addig, mig a tizedes pontig érünk s akkor a tizedes pontot felteszszük.

Lássunk egy ilyen osztást:

264·72 : 24 = 11·03
24
=24
24
=72
72
==

ha megvizsgáljuk az eljárást, azt tapasztaljuk, hogy 24-gyel először a 26-ot osztottuk, melyben megtaláltuk egyszer s még maradt 2, ehhez lehoztuk a 4-et, szintén egyszer találtuk meg, több egész az osztandóban nem lévén, a hányadosba a tizedes pontot feltettük s az osztást rendesen folytattuk, azaz a tizedes pont után levő első számot (7-et) lehoztuk, melyben a 24-et 0-szor találtuk meg s ezt a hányadosba is kiirtuk, a 7-hez lehoztuk a 2-t s lett 72, melyben a 24-et 3-szor találtuk meg. Végrehajtván ekként az osztást, hányadosként 11·03-at találtunk.

Hogy vajjon az osztásunk helyes-e, tegyünk egy probát, vagyis a hányadost (11·03) szorozzuk meg az osztóval (24-gyel) s ha helyes a számitásunk, akkor e szorzat az osztandót kell adja.

Pl.

11·03 × 24
44 12
220 6
264·72

tehát látjuk, hogy az osztás helyes volt.

A szabály tehát ez leend: tizedes törtet ugy osztunk egészszel, hogy az egészszel az osztást a tizedes pontig rendesen végezzük s ha azt elértük, akkor a hányadosba is a tizedes pontot felteszszük.

Nézzük most a harmadik esetet, vagyis azt, a midőn egészet kell osztani tizedes törttel.

Tegyük fel előre is azon szabályt, melynek alapján ezen művelet végre lesz hajtva.

Egészet tizedes törttel ugy osztunk, hogy az osztó tizedes törtet a tizedes pont elhagyása által egész számmá alakitjuk s az osztandóhoz annyi 0-át csatolunk, a hány tizedes számjegy van az osztóban, azután az osztást, mint egész számmal, az ismert módon végrehajtjuk.

Pl. 379 : 45·82

itt látjuk, hogy az osztóban (45·82) két tizedes számjegy van, ha ezt a tizedes pont elhagyásával egész számmá alakitjuk, lesz belőle 4582.

A szabály azt mondja, hogy az osztandóhoz annyi 0-át kell csatoljunk, a hány tizedes jegy van az osztóban.

Az osztóban két tizedes számjegy van, tehát az osztandóhoz (379) két 0-át csatolunk s lesz akkor 37900.

Most az osztást az ismert módon végrehajtjuk.

Pl.

37900 : 4582 = 8
36656
= 1244

tehát a hányados 8, és 1244 a maradék.

Hogy az osztásunk helyes-e, megtudjuk, ha a 4582-t megszorozzuk 8-czal s a szorzathoz az 1244 maradékot hozzáadjuk, mivel annak az osztandót (37900) kell adja.

Lássuk tehát:

4582 × 8
36656 ez a szorzat, melyhez ha az 1244-et
1244 hozzáadjuk
37900 az eredmény, vagyis az összeg — a mint látjuk — az osztandóval egy és ugyanaz.

Vegyük most a negyedik esetet, vagyis azt, a midőn tizedes törtet kell 10-zel, 100-zal, 1000-rel, 10000-rel osztani.

A szabály igy szól: tizedes törtet ugy osztunk 10-zel, 100-zal, 1000-rel, 10000-rel stb., hogy az osztandóban a tizedes pontot annyi számjegygyel teszszük balra, a hány 0 van az osztóban.

Pl.

$$3686{\cdot}34 : 10 = 368{\cdot}634$$

azaz a tizedes pontot egy számmal balra előre tettük.

$$3686{\cdot}34 : 100 = 36{\cdot}8634$$

vagyis a tizedes pontot két számmal tettük előre.

Igy folytatjuk 1000-rel, 10000-rel stb.

III.

Közönséges törtek.

1. Mi a tört?

A tört nem egyéb, mint jelölt osztás.

Minden törtben megkülönböztetünk két számot, és pedig:

1. a számlálót; s
2. a nevezőt.

A közönséges tört alakja ilyen: $\frac{3}{4}$, vagyis két egymás fölé irt számot egy kis vizszintes vonallal (—) elválasztjuk.

A törtben a felső számot számlálónak s az alsót nevezőnek mondjuk.

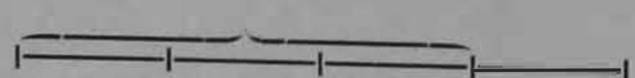
Tekintettel a szabályra, mely azt mondja, hogy: „a tört nem egyéb, mint jelölt osztás“, akkor ezen törtet $\frac{3}{4}$ igy is irhatjuk 3 : 4-gyel.

Egészitsük tehát a szabályt s mondjuk ki, hogy: „a tört nem egyéb, mint jelölt osztás, melyben a számláló az osztandó s a nevező az osztó.“

2. Mi a törtben a nevező s mi a számláló?

A nevező megnevezi (mutatja), hogy valamely egységet hány egyenlő részre kell osztani, mig a számláló megmutatja azt, hogy a nevező által szétosztott egység részeiből, hány részt kell venni.

Pl. Vegyünk elő egy kis pálczát s ezt vágjuk 4 egyenlő részre



ha most a felvett tört ($\frac{3}{4}$) értékét a pálczikán akarjuk megtudni, hogy mennyi, a szabályhoz fordulunk, a mely azt mondja, hogy

a nevező (itt a 4) megnevezi, hogy egy bizonyos egységet hány egyenlő részre kell osztani; tehát itt a $\frac{3}{4}$-ben a pálczát 4 részre kell osztani; a számláló pedig azt mutatja meg, hogy a nevező által elosztott egység részeiből hány részecskét kell venni, jelen esetben 3-at, mert a számláló 3.

Tehát a kis pálczának $\frac{3}{4}$ része a rajzban összekapcsolt három rész.

3. Hányféle törtet különböztetünk meg?

Megkülönböztetünk háromféle törtet és pedig:

1. tiszta törtet;
2. hamis vagy áltörtet; és
3. vegyes törtet.

4. Milyen a tiszta tört?

Tisztának mondjuk a törtet, ha abban a nevező nagyobb (vagyis a nevező több egységet foglal magában), mint a számláló.

Pl. $\frac{5}{7}$ ez tiszta tört, mivel a számláló kisebb a nevezőnél (vagyis a nevező nagyobb, mint a számláló.)

Tekintettel pedig arra, hogy a tört nem egyéb, mint jelölt osztás, ha a műveletet (az osztást) végrehajtjuk, akkor a nevezőt nem találjuk meg a számlálóban, tehát a törtben egész nem foglaltatik.

5. Milyen a hamis (ál) tört?

Ha a törtben a számláló nagyobb, mint a nevező, akkor a törtet hamisnak (álnak) nevezzük.

Pl. $\frac{12}{4}$ ez hamis tört; mert ha az osztási műveletet végrehajtjuk, azt fogjuk látni, hogy ez a tört egészeket is foglal magában.

$$\frac{12}{4} = 12 : 4 = 3$$
$$\begin{array}{c} 12 \\ \hline == \end{array}$$

6. Milyen a vegyes tört?

Ha a tört mellett egészek is vannak, azt a törtet vegyes törtnek nevezzük.

Pl. $23\frac{5}{6}$, azaz itt a 23 egész s az $\frac{5}{6}$ egy tiszta tört, de mert a 23 és az $\frac{5}{6}$ egy helyre tartozik, együttvéve $23\frac{5}{6}$ egy vegyes törtet képez.

Ezen törtet átváltoztathatjuk egy törtté, vagyis, hogy abban egészek ne legyenek, még pedig ugy, hogy a nevezővel megszorozzuk az egészet s a számlálót a szorzathoz adjuk, melyből lesz az uj számláló, míg az uj nevező értékváltozás nélkül lesz a régi nevező.

Pl. a felvett $23\frac{5}{6}$ vegyes törtet változtassuk át közönséges törtté.

$23\frac{5}{6}$ itt a 23-at megszorozzuk 6-tal (a nevezővel) s lesz

23 × 6

138 ez lesz a szorzat, melyhez

5 a számlálót (az 5-öt) hozzáadjuk

143 s lesz az uj számláló 143, mig a nevezőt változatlanul aláirjuk, igy: $\frac{143}{6}$.

Ha most meg akarjuk tudni, hogy vajjon az összeöntés által a vegyes tört értéke nem változott-e, a nevezővel oszszuk el a számlálót.

$$\frac{143}{6} = 143 : 6 = 23\frac{5}{6}$$

12

=23

18

=5

Mondjuk ki tehát szabályul, hogy „a tört értéke nem változik, ha mind a számlálót, mind a nevezőt egy és ugyanazon számmal megszorozzuk, vagy egy és ugyanazon számmal elosztjuk."

A fenti példát ha megtekintjük, ezen szabály igazságáról győződünk meg.

Ugyanis, ha a 23 egésznek nevezőjéül egy 1-est teszünk.

Pl. $\frac{23}{1}$ ez még a tört értékén nem változtat, mivel tudjuk, hogy az egy sem nem oszt, sem nem szoroz.

Ennélfogva a 6-tal a $\frac{23}{1}$ törtnek mind a számlálót (23-at), mind a nevezőjét (1-et) megszorozva, lesz belőle $\frac{138}{6}$, ha most a számlálóhoz a régi számlálót (az 5-öt) hozzáadjuk, lesz $\frac{143}{6}$.

Hogy a fenti szabály igazságáról még jobban meggyőződjünk, vegyük fel az alábbi példát s először szorozzuk meg, később oszszuk el.

Pl. $\frac{3}{4}$ ezt szorozzuk meg 2-vel

lesz $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{8}$

tehát a 2-vel mind a számlálót (3) mind a nevezőt (4) megszoroztuk s szorzatúl $\frac{6}{8}$ találtunk.

Hogy pedig ezen szorzás által a tört értéke nem változott, vegyünk elő két egyforma hosszúságu pálczikát, az elsőt törjük el 4 felé, a másikat 8 felé? az elsőből vegyünk 3, mig a másodikból 6 részt.

Pl.

 tört alakban a kijelölt részt igy fejezzük ki $\frac{3}{4}$.

 „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{6}{8}$.

Ha a pálczikákon a kijelölt részeket összehasonlitjuk, azt találjuk, hogy mindkettőben a kijelölt rész egy hosszuságu, vagyis ha valamely egészet 4 részre osztunk s abból 3 részt veszünk, éppen annyit találunk, mintha az egészet 8 részre osztva, a részekből 6-ot elveszünk.

Ha most $\frac{6}{8}$-ad törtnek mind a számlálóját, mind a nevezőjét elosztjuk 2-vel, $\frac{3}{4}$-et találunk, vagyis a felvett törtet, melynek értékét már a pálczikán megismertük.

Összeadás.

7. Miként lehet törtet törttel összeadni?

Törtet törttel csakis akkor adhatunk össze, ha valamennyi törtnek egy és ugyanazon szám a nevezője.

Pl $\frac{2}{4} + \frac{3}{4}$ ez a két tört összeadható, mivel mind a kettőnek a nevezője 4-es.

Ha az összeadandó törtek nevezői egyformák, akkor a számlálókat összeadjuk s egyik nevezőt változatlanúl aláirjuk.

Nézzük a fenti példát $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, tehát itt a két számlálót (a 2 és 3-at) összeadtuk s lett belőle 5, ezután az egyik nevezőt (a mi itt a 4-es) változatlanúl aláirtuk s lett belőle $\frac{5}{4}$.

8. Miként járunk el akkor, ha több összeadandó törtnek nevezője nem egyenlő?

Ha a nevezők nem egyenlők, akkor közös nevezőt keresünk a törteknek.

Hogy miként keressünk a törteknek közös nevezőt, lássuk a következő példát részletesen kidolgozva:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=?$$

Itt fel van véve négy tört, melyek mindenikének a nevezője különböző.

Most egy oly számot kell keresnünk, melyben a felvett törtek nevezői külön-külön, maradék nélkül megtaláltatnak.

Ezt a számot pedig könnyen megtalálhatjuk, ha a nevezőket összeszorozzuk.

Pl.

$$4\times 6\times 5\times 3=$$

tehát $4 \times 6 = 24$, most a 24-et szorozzuk meg az 5-tel, lesz $24 \times 5 = 120$, ezt pedig megszorozzuk a 3-mal s lesz $120 \times 3 = 360$; tehát a 360 szám az, melyet a felvett törtek nevezőivel (a 4, 6, 5 és 3-mal) maradék nélkül el lehet osztani.

Miután pedig tudjuk azt, hogy nagy számmal az egyes műveletek végrehajtása nehezebb, mint kisebbel, ez esetben ugy segitünk magunkon, hogy a már felvett nevezőket kisebbitjük, hogy igy azoknak a szorzata is kisebb legyen.

A nevezők kisebbitése a következőképen történik.

Legyen itt is a felvett négy tört:

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=?$$

A nevezőket külön-külön megnézzük s ha azok között van olyan, mely a másik nevezőben maradék nélkül találtatik, azt kihuzzuk, mivel ha annak többszöröse valamely számban megtaláltatik maradék nélkül, ugy az is megtaláltatik.

Pl. irjuk le a fenti törtek nevezőit:

4, 6, 5, 3, itt látjuk, hogy a 3 a 6-ban maradék nélkül megtaláltatik, a 3-at tehát áthuzzuk, mert a mit mi 6-tal el tudunk osztani, azt 3-mal is eloszthatjuk.

Lesz tehát:

4, 6, 5, most megnézzük, hogy a felvett s a 3-as kihuzásával maradt nevezőket valamely számmal maradék nélkül nem oszthatjuk-e?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4,\ 6,\ 5 \\ & 2,\ 3,\ 5 \end{array}$$

Itt a 4-et és 6-ot 2-vel lehet osztani, tehát a fenti alakban a nevezőket egymástól vesszővel elválasztva leirjuk, baloldalon egy függőleges vonalat huzva, azt a számot, a melylyel röviditeni akarunk (jelen esetben a 2), a vonalon kivül a nevezőkkel egy sorba kiirjuk. Most a 2-t megkerestük a 4-esben s abban 2-szer találtuk maradék nélkül; azt a számot, a hányszor megtaláltuk, alája irjuk; a 6-ban megtaláltuk a 2-őt 3-szor s igy a 3-ast a 6 alá irtuk, mig a 2-őt az 5-ben maradék nélkül nem találtuk meg, igy azt ujból leirtuk.

Most, miután a legutolsó számokat tovább röviditeni nem lehet, azokat és a vonalon kivül levő számot (a 2-t) összeszorozzuk s lesz akkor

$$2\times 2\times 3\times 5=60$$

Ha most ezen utóbbi számot, a 60 és az előbbi 360 összehasonlítjuk, azt fogjuk látni, hogy ez utóbbi 6-szor nagyobb az előbbinél, tehát a szorzási és osztási műveletet is hatszor nehezebben lehet végrehajtani.

Ez a most kihozott 60 szám az összes számok között a legkisebb, melyben a felvett törtek nevezői (4, 6, 5, 3) maradék nélkül megtaláltatnak, ugyanezért tehát ezt a számot „legkisebb közös többes"-nek, vagyis a törteknél „közös nevező"-nek nevezzük.

9. Mi is tehát a legkisebb közös többes vagy közös nevező?

A legkisebb közös többes az a legkisebb szám, melyet a felvett számok mindenikével maradék nélkül el lehet osztani.

Folytassuk most a felvett törteknek összeadását.

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$$

Miután ezen törteknek egy közös nevezőt kerestünk ki (60), tegyük tehát ezen számot azon szabály értelmében mindenik tört nevezőjéül, hogy „a tört értéke nem változik, ha mind a nevezőt, mind a számlálót egy és ugyanazon számmal megszorozzuk".

Tehát vegyük az első törtet, $\frac{3}{4}$-et.

Ha én a 4-es helyett 60-at irok, akkor a 4-es 15-tel lett megszorozva; hogy tehát a tört értéke ne változzék, a számlálót is meg kell szorozni 15-tel s lesz akkor 45, vagyis tört alakban $\frac{45}{60}$.

A $\frac{45}{60}$ éppen annyi értékü, mint a $\frac{3}{4}$.

Vegyük a második törtet: $\frac{5}{6}$, itt a nevező a 60-as 10-zel lett megszorozva, hogy az uj nevezőt, a 60-at adta, tehát a számlálót (5) is 10-zel kell megszorozzuk, hogy a tört értéke ne változzék s lesz akkor $\frac{50}{60}$.

A harmadik törtben ($\frac{4}{5}$) a nevező 12-vel lett megszorozva, hogy a 60-at adta, tehát a 4-est mint számlálót is 12-vel kell megszorozni, hogy a tört értéke ne változzék, lesz tehát $\frac{48}{60}$.

A negyedik törtben a nevező (3) 20-szal lett megszorozva, hogy a 60-at adta, tehát a 2-őt is, mint a 3-asnak számlálóját, szintén 20-szal kell megszorozni, hogy a tört értéke ne változzék; lesz tehát $\frac{40}{60}$.

Most az igy összeállitott uj törteket irjuk le összeadandóúl. A $\frac{3}{4}$ helyett $\frac{45}{60}$, az $\frac{5}{6}$ helyett $\frac{50}{60}$, a $\frac{4}{5}$ helyett $\frac{48}{60}$ és a $\frac{2}{3}$ helyett $\frac{40}{60}$.

Lesz tehát

$$\frac{45}{60}+\frac{50}{60}+\frac{48}{60}+\frac{40}{60}=?$$

Ha ezt a négy törtet megvizsgáljuk, azt látjuk, hogy mind a négy törtnek egy nevezője van, tehát akkor irhatjuk a fenti törtet igy is:

$$\frac{45+50+48+40}{60}=?$$

vagyis az összes számlálónak egy nevezőt irunk.

Most a számlálókat összeadjuk szabályszerüen s a nevezőt aláirjuk.

$$\begin{array}{r} 45 \\ 50 \\ 48 \\ 40 \\ \hline 183 \end{array}$$

ez az uj számláló, melyet igy irunk le: $\frac{183}{60}$.

Ha most megvizsgáljuk ezen uj törtet, azt találjuk, hogy ez egy áltört, melyben egészek is foglaltatnak.

Az egészeket pedig ugy keressük ki, hogy a nevezővel osztjuk a számlálót.

Lesz tehát:

$$\begin{array}{l} 183 : 60 = 3\frac{3}{60} \\ \underline{180} \\ ==3 \end{array}$$

vagyis ezen áltörtben van 3 egész és még megmarad $\frac{3}{60}$.

A törtek összeadásánál még egy másik alakot is ismerünk, a mely az eljárásban is különbözik, de az eredményben nem.

Pl. a felvett törteknél

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$$

a felvett törtek közös nevezőjéül az előbbi mód szerint kikeresve itt is a 60 lesz.

Ezt ilyen alakba irjuk

$$\begin{array}{ll|l} \multicolumn{3}{c}{60} \\ \hline \frac{3}{4} & 15 & 45 \\ \frac{5}{6} & 10 & 50 \\ \frac{4}{5} & 12 & 48 \\ \frac{2}{3} & 20 & 40 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{183} \end{array}$$

vagyis a 60-at mint közös nevezőt a felső vizszintes vonalra irtuk, azután a felvett törteket — a mint látjuk — a függőleges vonaltól balra. Ezután a felső ($\frac{3}{4}$) tört nevezőjével (4) elosztottuk a 60-at mint közös nevezőt s a talált számot (15) a tört ($\frac{3}{4}$) után a függőleges vonal mellé irtuk, most a talált számot (15) a tört számlálójával (3) megszoroztuk s az igy nyert szorzatot (45) a függőleges vonaltól jobbra velük egy vonalba irtuk. Igy jártunk el a többi törteknél is. Midőn pedig e müveletet valamennyi törttel elvégeztük, a függőleges vonaltól jobbra eső számokat összeadtuk s ez 183-at vagyis az uj számlálót eredményezte, mely alá 60-at mint közös nevezőt irva lesz $\frac{183}{60}$ vagyis ugyanaz, melyet az első módozat szerint a müvelet végrehajtása után találtunk.

Kivonás.

10. Miként vonhatunk ki törtet törtből?

Törtet törtből csak akkor vonhatunk ki, ha ugy a kisebbitendőnek, mint a kivonandónak egy és ugyanazon szám a nevezője.

Pl. $\frac{8}{5}-\frac{6}{5}=?$ ezt ki lehet vonni, mivel mindkettőnek 5 a nevezője.

Ha a nevezők egyenlők, akkor a számlálót a számlálóból kivonjuk s a maradékot uj számlálónak irva, az egyik nevezőt változatlanúl aláirjuk.

Lesz tehát a fenti példánál $\frac{8}{5} - \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$, azaz a 6-ot kivontuk a 8-ból, maradt 2, ezt a 2-őt irtuk a maradék számlálójául s az 5-öt, mint régi nevezőt irtuk alája nevezőül.

Ha a nevezők nem egyenlők, akkor első sorban közös nevezőre hozzuk, vagyis kikeressük — az ismert mód szerint — a legkisebb közöstöbbest, illetve közös nevezőt.

Pl.

$$\frac{24}{8} - \frac{16}{22} = ?$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 8,\ 22 \\ & 4,\ 11 \end{array}$$

$2 \times 4 \times 11 = 88$, ez a közös nevező.

$$\frac{24}{8} - \frac{16}{22} = \frac{264}{88} - \frac{64}{88} = ?$$

$$\frac{264 - 64}{88} = \frac{200}{88} \text{ ez egy áltört,}$$

melyben egészek is vannak.

Az egészeket kikeresve

$$\begin{array}{l} 200 : 88 = 2\frac{24}{88} \\ \underline{176} \\ 24 \end{array}$$

Tehát, ha $\frac{24}{8}$-ból $\frac{16}{22}$-et kivonunk, marad még $2\frac{24}{88}$.

Ha nekünk a számolás végén nagy törtünk van, akkor azt azon szabály értelmében, hogy »a tört értéke nem változik, ha mind a számlálót mind a nevezőt egy és ugyanazon számmal osztjuk«, kisebbitjük.

Jelen esetben a $\frac{24}{88}$-at lehet kisebbiteni 8-czal, vagyis mind a számlálót, mind a nevezőt elosztjuk 8-czal, lesz tehát:

$24 : 8 = 3$

$88 : 8 = 11$ vagyis, ha a 8-czal mind a számlálót, mind a nevezőt osztjuk, akkor egy uj törtet nyerünk, a mi jelen esetben $\frac{3}{11}$. A kivonásunknál tehát a maradék $2\frac{3}{11}$.

A kivonásnál is éppen ugy mint az összeadásnál van egy másik alak, a mely az eredményt nem befolyásolja.

Pl. a felvett törtnél

$$\frac{24}{8} - \frac{16}{22}$$

A közös nevezőt az ismert mód szerint kikeresve 88-at találunk,

$$\begin{array}{c|c|l} \multicolumn{3}{c}{88} \\ \hline \frac{24}{8}\ 11 & 264 & \text{ez a kisebbitendő.} \\ \frac{16}{22}\ \ 4 & 64 & \text{ez a kivonandó.} \\ \hline \multicolumn{2}{r}{200} & \end{array}$$

Végrehajtván a müveletet, maradékul 200-at találtunk, mely alá mint uj számláló alá a közös nevezőt (88) irva lesz $\frac{200}{88}$, vagy ugyanazon tört mint a másik módozat szerinti kivonásnál.

Ha egy egészből kell törtet kivonni, ugy járjunk el, hogy az egésznek nevezőjéül egy 1-est teszünk s azután az ismert módon kisebbitendő és kivonandónak kikeressük a közös nevezőjét, tovább pedig ugy járunk el, mint a törtet törtből ismert mód szerint, azaz a számlálót a számlálóból kivonjuk, a maradék lesz az uj számláló s a közös nevezőt változatlanúl aláirjuk a maradék nevezőjének.

Törtből egészet ugy vonunk ki, hogy az egészet kivonjuk a tört számlálójából s a maradékot irjuk uj számlálónak, mig a kisebbitendő nevezőjét változatlanúl irjuk uj nevezőnek.

Pl.

$$\frac{38}{4} - 6 = \frac{32}{4}$$

Itt a 6-ot kivontuk a 38-ból s lett belőle 32 a maradék, melyet irtunk uj számlálónak, mig a 4-est, mint a kisebbitendő nevezőjét változatlanúl irtuk uj nevezőnek.

Szorzás.

11. Miként szorozunk törtet törttel?

Törtet törttel ugy szorozunk, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezövel megszorozzuk, előbbi szorzat lesz az uj számláló, az utóbbi az uj nevező.

Pl.

$$\frac{4}{6} \times \frac{8}{7} = \frac{32}{42}$$

Ha megvizsgáljuk ez utóbbi törtet ($\frac{32}{42}$), azt találjuk, hogy a 32-től, mint uj számlálót, a 4 és 8-nak, mint régi számlálónak szorzata adta, mig a 42-től, mint uj nevezőt, a 6 és 7 régi nevezők szorzata eredményezte.

12. Miként szorozunk egészet törttel és törtet egészszel?

Törtet egészszel és egészet törttel ugy szorozunk, hogy az egészet a tört számlálójával megszorozzuk s ez lesz a szorzat számlálója, a tört nevezőjét pedig változatlanúl a szorzat nevezőjéül irjuk.

Pl.

$$6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$
$$\frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4}$$

vagyis, mint látjuk, az első törtnél a 6-ost, mint egészet, megszoroztuk a 4-gyel, mint a tört számlálójával s az 5-öst, mint nevezőt, változatlanúl a szorzat nevezőjéül irtuk s lett a szorzat eredménye $\frac{24}{5}$.

A második példánál a 7 egészszel megszoroztuk a tört számlálóját, a 3-ast, lett belőle 21, ezt irtuk a szorzat számlálójáúl, mig a tört nevezőjét, a 4-est irtuk nevezőnek s igy lett a szorzat $\frac{21}{4}$.

Osztás.

13. Miként osztunk törtet törttel?

Törtet törttel ugy osztunk, hogy az osztó nevezőjével megszorozzuk az osztandó számlálóját s a szorzatot irjuk a hányados számlálójául; ezután az osztó számlálójával megszorozzuk az osztandó nevezőjét s ezen szorzatot irjuk a hányados nevezőjéül.

Ezen szabályt rövidebben igy is mondjuk:

Törtet törttel ugy osztunk, hogy keresztbe szorozzuk, még pedig az osztó nevezőjével az osztandó számlálóját s ebből lesz a számláló, azután az osztó számlálójával megszorozzuk az osztandó nevezőjét s ebből lesz az uj nevező.

Pl.

$$\frac{4}{6} : \frac{7}{9} = \frac{36}{42}$$

Ha ezen példában az eredményt (hányadost) $\frac{36}{42}$ megvizsgáljuk, a szabályt levonhatjuk belőle, mert a 36-ot, mint számlálót, az osztó nevezőjének (itt a 9-es) és az osztandó számlálójának (4-es) a szorzata eredményezte, mig a 42-től, mint uj nevezőt, az osztó számlálójának (a 7-es) és az osztandó nevezőjének (a 6-os) a szorzata adta.

14. Miként osztunk törtet egészszel?

Törtet egészszel ugy osztunk, hogy a tört számlálóját változatlanúl irjuk a hányados számlálójáúl, mig az egészszel a tört nevezőjét megszorozva, ezen szorzatot irjuk a hányados nevezőjéül.

Pl.

$\frac{5}{7} : 6 = \frac{5}{42}$, tehát itt az 5-öst, mint a tört számlálóját, változatlanúl aláirtuk a hányados számlálójáúl, mig a tört nevezőjét az egészszel (a 6-tal) megszorozva irtuk a hányados nevezőjéűl.

15. Miként osztunk egészet törttel?

Egészet törttel ugy osztunk, hogy a tört nevezőjével megszorozzuk az egészet, mely szorzatból lesz a hányados számlálója, mig a tört számlálóját változatlanúl a hányados nevezőjéűl irjuk.

Pl.

$8 : \frac{3}{5} = \frac{40}{3}$, tehát, a mint látjuk, a hányadosnál a 40-est, mint számlálót, az 5 és a 8 szorzata eredményezte, mig a nevezőt a tört számlálójának változatlan aláirása adta.

IV.

Hármasszabály.

1. Hányféle hármasszabályt ismerünk?

Kétféle hármasszabályt ismerünk, még pedig egyszerü és összetett hármasszabályt.

2. Melyik az egyszerü s melyik az összetett hármasszabály?

Egyszerünek mondjuk a hármas szabályt akkor, midőn az ismeretlen (keresendő) szám kikeresése csak egy körülménytől függ.

Pl.

Ha 8 munkás bizonyos idő alatt 72 koronát keres, akkor 15 munkás ugyanannyi idő alatt mennyit keres?

Itt az ismeretlen kikeresése csakis a munkások számától függ.

Foglalkozzunk tehát az egyszerü hármasszabálylyal s ismerjük meg azon eljárást, melylyel a feladatokat megfejthetjük.

Ha a feladatot megkaptuk, azt az egynemű mennyiségekre való tekintettel a következő alakban irjuk le.

Vegyük például a következő feladatot s fejtsük meg a hármas szabály szerint.

Ha 8 munkás bizonyos idő alatt 72 koronát keres, vajjon 15 munkás ugyanazon idő alatt mennyit keres?

Ezen feladatot hármasszabály szerint igy irjuk le:

8 munkás 72 korona
15 „ x „

vagyis az egynemü mennyiségeket egymás alá irjuk.

E példában a 8 és 15 szám a munkásokat jelöli, mig a 72 és az x a koronát.

Az x az ismeretlen, tehát ezt kell megkeresni.

Hogy az ismeretlent az ismert adatok segélyével megkereshessük, azokát arányba kell tegyük.

Az arány alakja ez:

1 : 1 = 1 : 1, azaz: az egyet osztva egygyel, egyenlő egyet osztva egygyel.

A felvett példát igy irjuk arányba:

$$x : 72 = 15 : 8$$

Az arány felállitásánál mindig szem előtt tartandó, hogy az arány első tagja mindig az ismeretlen legyen, melyhez a vele egynemü mennyiséget viszonyitjuk.

A felvett példában x-et viszonyitottuk a vele egynemü mennyiséghez, a 72-höz.

Most a másik mennyiséget arányba hozzuk az első mennyiséghez.

Hogy ezt tehessük, egy kérdést teszünk fel.

A jelen esetben azt kérdezzük, hogy vajjon 15 munkás többet keres-e egy és ugyanazon idő alatt, mint 8 munkás? Meg van a felelet, még pedig az, hogy „többet keres.“

Ennélfogva ezen felvett példát a hármasszabály alakja szerint irva, igy kérdezzük:

8 m. 72 k.
15 m. x k.

Az x-szel, vagyis az ismeretlennel nem egynemü s nem egy sorban levő számtól megyünk az x-szel egy sorban levő számig s megnézzük, hogy melyik a nagyobb.

Tehát itt a 8 munkástól megyünk a 15 munkáshoz s igy viszonyitunk:

Minél több a munkás, annál több a keresmény. Tehát egyenes az arány.

Ha az arány egyenes, akkor az arányban az egyenlőség jele (=) után irjuk az ismeretlennel egy sorban levő mennyiséget, jelen esetben a 15-öt, azután az ezzel egynemüt viszonyba irjuk.

Tehát lesz:

x: (ugy viszonylik a vele egynemühöz) 72 = (miképen) 15: (viszonylik a vele egynemühöz a) 8-hoz.

Számmal irva:

$$x : 72 = 15 : 8$$

Az arányban megkülönböztetünk előarányt és utóarányt.

Az egyenlőség (=) jele előtti részt előaránynak, az = jel utáni részt utóaránynak nevezzük.

Az arányt akkor mondjuk helyesnek, ha abban az előaránynál látható osztási müveletet végrehajtva, a hányados egyenlő lesz az utóaránynál jelzett osztási müvelet végrehajtása után nyert hányadossal.

Az arányban az egyenlőség jele mellett levő két számot az arány „beltagjainak“, a külsőket „kültagoknak“ nevezzük.

A helyes arányban a két beltag szorzatának egyenlőnek kell lennie a két kültag szorzatával. Ebből folyólag az ismeretlen kültagot megtaláljuk, ha a két beltag szorzatát elosztjuk az ismert kültaggal.

Tehát itt

$$\begin{array}{r} 72 \times 15 \\ \hline 360 \\ 72 \\ \hline 1080 \end{array}$$

ezt elosztjuk 8-czal, lesz tehát

$$\begin{array}{l} 10{,}8{,}0, : 8 = 135 \\ \;\;8 \\ \hline \;\;28 \\ \;\;24 \\ \hline =40 \\ \;\;40 \\ \hline == \end{array}$$

Tehát az ismeretlennek az értéke 135, azaz: mig 8 munkás 72 koronát keres, addig 15 munkás 135 koronát fog keresni.

Tegyük be a szabályba az ismeretlen helyett a talált 135-öt.

$$135 : 72 = 15 : 8$$

Azt mondottuk ugyanis, hogy az előarány és utóarányban a jelzett osztást végrehajtva, az osztat, vagyis a hányados mindkettőnél egyenlő kell legyen, hogy az arányt helyesnek mondjuk.

Végezzük el tehát a két osztást.

$$\begin{array}{l} 135 : 72 = 1\frac{63}{72} \\ \;\;72 \\ \hline \;\;63 \end{array}$$

ezt a törtet szabályszerüen kisebbiteni lehet, tehát kisebbitjük, még pedig 9-czel. Lesz tehát a 63 számlálóból, ha 9-czel elosztjuk 7 s

a 72, mint nevezőből 8, tehát a fenti tört, ha annak mind a számlálóját, mind a nevezőjét 9-czel osztjuk, lesz belőle $\frac{7}{8}$, vagyis a $135 : 72 = 1\frac{7}{8}$.

Oszszuk el most a 15-öt a 8-czal:

$$\begin{array}{l} 15 : 8 = 1\frac{7}{8} \\ \;\;8 \\ \hline \;\;7 \end{array}$$

vagyis az utóarányban a műveletet végrehajtva, a hányados $1\frac{7}{8}$.

Ha most megvizsgáljuk, a 135 : 72-vel és a 15 : 8-czal, azt találjuk, hogy az előbbinél (135 : 72) a hányados $1\frac{7}{8}$ s az utóbbinál (15 : 8) szintén $1\frac{7}{8}$, vagyis a hányadosok (ezt számtani kifejezéssel „kitevő“-nek nevezzük) egyenlők, tehát az arányunk és az ismeretlen értéke is helyes.

Az összetett hármasszabály alakja ez:

Pl.

Ha 8 munkás 4 nap alatt 72 koronát keres, mennyit fog keresni 15 munkás 10 nap alatt?

Felállitva:

8 m. 4 n. 72 kor.
15 m. 10 n. x kor.

$$x : 72 = 15 : 8$$
$$x : 72 = 10 : 4$$

Ezt a két viszonyt igy irhatjuk:

$$x : 72 = \left\{ \begin{array}{l} 15 : 8 \\ 10 : 4 \end{array} \right.$$

Ha most a beltagok szorzatát elosztjuk a kültagok szorzatával, megtaláljuk az ismeretlen kültag értékét.

Lesz tehát:

$$\begin{array}{r} 72 \times 15 \\ \hline 360 \\ 72 \\ \hline 1080 \end{array}$$

ezt megszorozzuk 10-zel, lesz belőle 10800, a 10800-at elosztjuk a kültagok szorzatával, a mi nem más, mint

$$8 \times 4 = 32$$

tehát:

$$10800 : 32 = 337\tfrac{16}{32}$$

```
 96
---
 120
  96
---
 240
 224
---
 =16
```

Az x (ismeretlen) értéke $337\frac{16}{32}$ korona.

A $\frac{16}{32}$ röviditve 16-tal, lesz $\frac{1}{2}$.

Lesz tehát az x értéke $337\frac{1}{2}$ korona.

Ha ilyen kérdés tétetnek fel:

Ha 8 munkás egy bizonyos munkát 10 nap alatt végez el, hány nap alatt végzi el ugyanazt a munkát 15 munkás?

8 m. 10 n.
15 m. x n.

Arányba irva lesz

$$x : 10 = 8 : 15$$

Itt az x-szel nem egy sorban levöt irtuk beltagnak, azért, mert a munkás és az idő között forditott arány van, azaz: minél több a munkás, annál kevesebb időre van szükség, hogy egy és ugyanazon munka elvégeztessék.

A két beltag szorzatát elosztjuk a kültaggal, lesz az eredmény $10 \times 8 = 80$ ezt most elosztjuk az ismert kültaggal (15-tel), lesz

$$80 : 15 = 5\tfrac{5}{15} = 5\tfrac{1}{3}$$

```
 75
---
 =5
```

Tehát az x értéke $5\frac{1}{3}$, vagyis, a mely munkát 8 munkás 10 nap alatt végez el, azt 15 munkás $5\frac{1}{3}$ nap alatt elvégzi.

Az arány felállitásánál tehát jól meg kell nézni, hogy a két mennyiség között minő a viszony, forditott vagy egyenes? Ezt a természetes gondolkozás utján tudjuk megitélni, még pedig annál gyorsabban s könnyebben, minél többet gyakoroljuk benne magunkat.

V.

Kamatszámitás.

1. *Mit értünk kamatszámitás alatt?*

Kamatszámitás alatt értjük azon számtani eljárást, melylyel gyümölcsözésre befektetett pénzünknek évi jövedelmét megtudhatjuk.

A kamatszámitásnál a gyakorlati életben a százalékot, vagyis a száztóli jövedelmet szokás alapúl venni. Ez alatt azt kell érteni, hogy akármily nagy legyen a befektetett összeg, először azt számitjuk ki, hogy 100 korona egy (1) év alatt mennyit jövedelmez s azután a befektetett összeget összehasonlitjuk a 100-zal, hogy vajjon a befektetett összeg nagyobb-e vagy kisebb-e a 100-nál. Most az összehasonlitásnál kiszámitjuk, hogy a betett összeg hányszor nagyobb vagy hányszor kisebb a 100-nál; azért, mivel a betett összeg is annyiszor többet, illetve annyiszor kevesebbet fog (jövedelmezni) kamatozni.

Pl.

Mondjuk azt, hogy 100 korona egy (1) év alatt 5 koronát (jövedelmez) kamatoz.

Ha most azt akarjuk megtudni, hogy vajjon 400 korona szintén egy (1) év alatt mennyit kamatoz, akkor ki kell számitanunk azt, hogy 100 hányszor foglaltatik a 400-ban.

Erre könnyen felelünk, mert a 400-ban a 100-at megtaláljuk 4-szer. Tehát ha a 100 korona egy (1) év alatt 5 koronát kamatoz, akkor a 400 korona, a mely 4-szer több, mint a 100, szintén 4-szer többet fog kamatozni. Ennélfogva a 100 korona évi kamatját (jelenleg 5) megszorozzuk 4-gyel s lesz belőle $5 \times 4 = 20$

Tehát a mig 100 korona egy (1) év alatt 5 koronát kamatoz, addig 400 korona ugyancsak egy (1) év alatt 20 koronát fog kamatozni.

Tekintettel pedig arra, hogy a befektetett tőke nem mindig akkora, mely a 100-nak egész számokban kifejezhető többszörösét, illetve hányadát képezné, ugyanezért az ily tőke kamatjának értékét a hármasszabály segitségével számitjuk ki.

A gyakorlati életből átvéve jelöljük a befektetett tőkét T-vel, azt az időt, mely alatt a tőke (T) kamatoz i-vel, a kamatot pedig, melyet a tőke (T) a felvett idő (i) alatt (jövedelmez) kamatoz, k-val.

Visszavezetve számitásunkat az előbb kifejtett példára, tudjuk, hogy alapúl a 100-at veszszük, mely egy (1) év alatt bizonyos meghatározott összeget kamatoz (jövedelmez).

A mit a 100 egy (1) év alatt kamatoz, jelöljük sz %-szel

Tehát

a tőkét jelöljük T-vel, az időt, melyben a T kamatoz, i-vel. a kamatot, melyben a T i idő alatt kamatoz, k-val.

Ennélfogva ha 100 Kor. tőke 1 év alatt sz % kamatoz, akkor T Kor. tőke i év alatt k kamatoz.

A kamatszámitásnál a 100 és 1 mindig adva kell hogy legyen, mert ez képezi az alapot, tehát mi vagy a (T) tőkét, vagy az (i) időt, melyen a tőke (T) kamatoz, vagy a kamatot (k) kell keressük, melyet a tőke (T) egy bizonyos idő (i) alatt kamatoz, vagy a százalékot.

Tehát vagy a tőkét	T	
„ az időt	i	
„ a kamatot	k	kell kiszámitanunk.

Vegyük egyenként.

1. Keressük a tőkét (T)

A tőkét megtaláljuk, ha a százat a tőke kamatjával és az 1-gyel megszorozzuk s az igy nyert szorzatot a százalék és idő szorzatával elosztjuk.

Pl.

Mekkora az a tőke, a mely 4 százalékos kamattal 5 év alatt 800 koronát kamatoz (jövedelmez)?

Itt a T-t kell keresni, a többi mind adva van.

A 100 és 1 mindig adva van.

$$\begin{array}{lll} \text{az sz } \% & = & 4 \\ \text{az } i & = & 5 \\ \text{a } k & = & 800 \end{array}$$

Hármas szabály alakba felállitva lesz

$$\begin{array}{llll} 100 \text{ Kor.} & 1 & \text{év} & 4\% \\ T & 5 & „ & 800 \end{array}$$

$$T : 100 = \left\{ \begin{array}{l} 800 : 4 \\ 1 : 5 \end{array} \right.$$

A mint látjuk, arányba állitottuk s ugy találtuk, hogy a (T) tőke a kamattal egyenes, mig az idővel forditott arányban áll.

És ez természetes, mert minél nagyobb a tőke, annál nagyobb ugyanazon időre a kamat is, de megforditva áll az idővel, mert minél nagyobb a tőke, annál kevesebb idő kell, hogy ugyanazon kamatot jövedelmezze.

Fejtsük meg a fenti példát.

A mint a hármasszabálynál láttuk az arányban levő ismeretlen kültagot — jelenleg a T. — megtaláljuk, ha a beltagok (itt a 100, 800 és 1) szorzatát elosztjuk az ismert kültagok (itt a 4 és 5) szorzatával.

800 × 100 = 80000 ezt megszorozva 1-gyel lesz 80000, ezt most elosztjuk a 4 × 5 = 20-szal

$$\begin{array}{l} 80000 : 20 = 4000 \\ \underline{80} \\ '' '' \end{array}$$

Tehát a T értéke 4000 korona.

2. Keressük az időt.

Pl. Ha 100 korona 1 év alatt 4%-ot kamatoz, vajjon 4000 korona mennyi idő alatt jövedelmez 800 koronát.

Az időt (i) megtaláljuk, ha kamatot a 100-zal s ezen szorzatot az 1-gyel megszorozzuk és az igy nyert szorzatot a tőke és a százalék szorzatával elosztjuk.

Állitsuk fel a hármasszabály alakját.

$$\begin{array}{llll} 100 \text{ korona} & 1 \text{ év} & 4\% & \\ 4000 \quad « & i \quad « & 800 & \text{itt az } i \text{ az ismeretlen} \end{array}$$

$$i : 1 = \left\{ \begin{array}{l} 800 : 4 \\ 100 : 4000 \end{array} \right.$$

A mint látjuk az idő a kamattal egyenes, mig a tőkével és a sz. %-kal forditott arányban áll, mert minél több az idő, annál több egy és ugyanazon tőkének kamatja is, mig minél kevesebb az idő, annál nagyobb százalékra kell kiadni a tőkét, hogy egy és ugyanazon kamatot jövedelmezze.

Hajtsuk végre a müveletet az ismert mód szerint t. i. a beltagok szorzatát oszszuk el a kültagok szorzatával.

Lesz:

800 × 100 = 80000 ezt megszorozzuk 1-gyel, lesz 80000 ezt oszszuk el a 4000 × 4 = 16000

$$\begin{array}{l} 80000 : 16000 = 5 \\ \underline{80000} \\ \text{" " " " "} \end{array}$$

Tehát az i értekét 5 vagyis 4000 korona 4% kamattal 5 év alatt kamatoz 800 koronát.

3. Keressük a kamatot.

Pl.

4000 korona 4% kamattal 5 év alatt mennyit kamatoz?

A kamatot megtaláljuk, ha a százalékot a tőke és az idővel megszorozva, ezen szorzatot az 1 és a 100 szorzatával elosztjuk.

Hármasszabály alakba felállitva.

100 k. 1 év 4%
4000 « 5 « k. itt az ismeretlen a k.

Arányba téve

$$k : 4 = \left\{ \begin{array}{l} 4000 : 100 \\ \;\;5 \;\;\;: 1 \end{array} \right.$$

Vagyis mint látjuk a kamat a százalékhoz, a tőkéhez és az időhöz egyenes arányban áll, mert minél nagyobb a kamat, annál nagyobbnak kell a tőkének lenni, hogy egy bizonyos idő alatt, meghatározott kamatot jövedelmezzen s minél nagyobb a kamat, annál több idő szükséges egy és ugyanazon tőkének jövedelmezésére.

Fejtsük meg a fenti példát az ismert mód szerint.

Lesz

4000 × 4 = 16000, ez szorozva 5-tel = 80000, 80000 osztva a 100-zal

tehát

$$\begin{array}{l} 80000 : 100 = 800 \\ \underline{800} \\ \text{" " "} \end{array}$$